Funciones Reales I. 2016. Práctico nro 5
Convergencia. Medida producto

1. Supongamos que $\mu(X) < \infty$.Si f y g son funciones medibles en X, definimos

$$\rho(f, g) = \int \frac{|f - g|}{1 + |f - g|} d\mu$$

   (a) ¿Es finita ρ para algún par de funciones diferentes?. Observe que las funciones son sólo medibles.

   (b) Si identificamos las funciones que son iguales en ctp, resulta que ρ es una medida.

   (c) Si $f_n \xrightarrow{m} f$, ¿qué sucede con $\rho(f_n, f)$?. ¿Vale la recíproca?.

2. Si $f_n \geq 0$ y $f_n \xrightarrow{m} f$ probar que $\int f \leq \liminf \int f_n$.

3. Supongamos que $|f_n| \leq g \in L^1$ y $f_n \xrightarrow{m} f$. Analizar la convergencia de $\int f_n$ y $(f_n.)_n$ en L^1.

4. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida finita, $(f_n)_n$ y f funciones medibles tales que $f_n \xrightarrow{m} f$. Probar que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, $g \circ f_n \xrightarrow{m} g \circ f$.

5. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio , $f_n \xrightarrow{m} f$ y $g_n \xrightarrow{m} g$.

   (a) Probar que, si X esde medida finita, entonces $f_n^2 \xrightarrow{m} f^2$ y $f_n g_n \xrightarrow{m} fg$.

   (b) Probar que $f_n + g_n \xrightarrow{m} f + g$

   (c) Analizar las sucesiones de funciones $f_n(x) = x$ y $g_n(x) = \frac{1}{n}; .n \in \mathbb{N}$ en $X = [0, +\infty)$. ¿Porqué no se contradice a)?

6. Sobre $\mathbb{R}$ se considera la medida de Lebesguey sobre $\mathbb{R}^2$ la medida producto. ¿Es cierto que si $E \subset \mathbb{R}^2$ es medible, entonces E^y es medible en $\mathbb{R}$?

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} & \text{si } x \neq y \qquad x, y \in [0, 1] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   ¿Es f integrable en $\mathbb{R}^2$ cn la medida producto?

8. Sean $\Delta = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : x = y\}$, m la medida de Lebesgue en $[0, 1]$, υ la medida de contar sobre $[0, 1]$, μ la medida producto de ambas y $f = \chi_\Delta$.

   (a) Calcular $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\ dm\ d\upsilon$ y $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\ d\upsilon\ dm$.

   (b) ¿Es f μ-medible?, ¿Es f μ-integrable?

9. (La integral como área bajo la gráfica). Sea X un espacio de medida, $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue, $X \times \mathbb{R}$ el correspondiente espacio de medida producto y $f : X \to \mathbb{R}^+$ una función medible. Probar que el conjunto

$$\{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq f(x)\}$$

es medible en $X \times \mathbb{R}$,y que su medida es igual a $\int_X f$.

10. (Principio de Cavalieri). Sean $(X, \mathcal{A}, \lambda)$ y (Y, Σ, μ) dos espacios de medida σ-finitos. Si A y B son dos subconjuntos medibles del espacio de medida producto, $X \times Y$, tales que $\mu(A_x) = \mu(B_x)$ $\lambda-$c.t.p. $x \in X$, demostrar que A y B tienen la misma medida.