Funciones Reales I. 2016. Práctico nro. 4
Integración.

En toda la práctica nos estaremos refiriendo a un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Los ejercicios con * son para entregar.

1. Sea $f \geq 0$ medible tal que $\int f < \infty$, entonces $\{x : f(x) = \infty\}$ es un conjunto nulo y $\{x : f(x) > 0\}$ es σ-finito. (Ej 12 pág 52 Folland)

2. Supongamos que $\{f_n\} \subset L^+$, con $f_n \to f$ puntualmente y $\int f = \lim_n \int f_n < \infty$. Entonces $\int_E f = \lim_n \int_E f_n$ para todo $E \in \mathcal{M}$. ¿Es cierto el resultado si $\int f = \infty$? (Sug: analizar el caso $F = (-\infty, 0)\,, F_n = F \cup [n, n+1)\,, f_n = \chi_{F_n} f = \chi_F$). (Ej 13 pág 52 Folland)

3. Si $f \in L^+$, definimos

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu, \text{ para cada } E \in \mathcal{M}.$$

   Entonces λ es una medida en $\mathcal{M}$, y para cualquier $g \in L^+$,

$$\int g d\lambda = \int f g d\mu.$$

   (Sug. suponer primero que g es simple).(Ej 14 pág 52 Folland)

4. Si $\{f_n\} \subset L^+$, es tal que decrece puntualmente a una función f y $\int f_1 < \infty$, entonces $\int f = \lim_n \int f_n$.(Ej 15 pág 52 Folland)

5. Si $f \in L^+$ y $\int f < \infty$, probar que $\forall \epsilon > 0, \exists E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) < \infty$ y $\int_E f > \left(\int f\right) - \epsilon$. (Ej 16 pág 52 Folland)

6. Asumiendo cierto el Lema de Fatou, deducir el Teorema de Convergencia Monótona. (Ej 17 pág 52 Folland)

7. * (Ej 19 pág 59 Folland)Supongamos que $\{f_n\} \subset L^1(\mu)$ y $f_n \to f$ unifrmemente,

   (a) Si $\mu(X) < \infty$, entonces $f \in L^1(\mu)$ y $\int f_n \to \int f$.

   (b) Supongamos $X = \mathbb{R}$ y μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, si $f_n(x) = 2^{-n}\chi_{[2^{-n}, 2^n)}(x)$ ¿es contradictorio con el resultado de (a)?. ¿Porqué?.

8. (Una generalización del Teorema de convergencia Mayorada de Lebesgue). Si $f_n, f, g_n, g \in L^1(\mu)\,, f_n \to f$ y $g_n \to fg$ en ctp con $|f_n| \leq g_n$ y $\int g_n \to \int g$ entonces $\int f_n \to \int$. (Ej 20 pág 59 Folland)

9. * Supongamos $f_n, f \in L^1(\mu)$ y $f_n \to f$ en ctp. entonces $\int |f_n - f| \to 0$ si y sólo si $\int |f_n| \to \int |f|$.(Ej 21 pág 59 Folland)

10. La función gama Γ. Para cada $z \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re} z > 0$ definimos

$$\begin{aligned} f_z &: (0,\infty) \to \mathbb{C}, \text{ como } f_z(t) = t^{z-1}e^{-t} \text{ y} \\ \Gamma(z) &= \int_0^\infty f_z(t)\, dt \end{aligned}$$

   (a) Probar que $f_z \in L^1(0,\infty)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re} z > 0$ fijo. En cuyo caso $\Gamma(z)$ estará bien definido, ¿porqué?.
   (b) Probar que $\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$. ¿Qué sucede si $z = n \in \mathbb{N}$?
   (c) Analizar cómo se puede extender $\Gamma(z)$ con $\operatorname{Re} z > -n-1$. (Sug. esar el punto (b)e inducción en n).

11. Las transformadas integrales.

   (a) La transformada de Laplace. Sea $f(t) \in L^1(0,\infty)$, para cada $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s \geq 0$,se define

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$$

      i. Probar que $\mathcal{L}(f)$ está bien definida para cada $f(t) \in L^1(0,\infty)$
      ii. Verificar que $\mathcal{L}(f)$ es un operador lineal de $L^1(0,\infty)$ en $\mathbb{R}$. Es decir que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^1(0,\infty)$ se verifica que

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}(f) + \beta \mathcal{L}(g)$$

   (b) La transformada de Fourier. Sea $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$, para $\xi \in \mathbb{R}$ se define

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \xi t} f(t)\, dt$$

      i. Probar que $\hat{f}$ está bien definida para cada $f(t) \in L^1(\mathbb{R})$.
      ii. Verificar que $\hat{f}$ es un operador lineal de $L^1(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$. Es decir que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ se verifica que

$$(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

      iii. Si $f(t) \in L^1(0,\infty)$,¿está bien definida $\hat{f}$?. ¿Hay alguna relación entre $\hat{f}$ y $\mathcal{L}(f)$?

12. (Teor. 2.27, pág. 56 Folland). Supongamos que $f : X \times [a,b] \to \mathbb{R}$ y que $f(.,t) : X \to \mathbb{R}$ es integrable para cada $t \in [a,b]$. Sea

$$F(t) = \int_X f(x,t)\, d\mu(x).$$

(a) Supongamos que existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $|f(x,t)| \leq g(x)$ para todo x, t. Si el $\lim_{t \to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$ para todo $x \in X$, probar que $\lim_{t \to t_0} F(t) = F(t_0)$; en particular, si $f(.,t)$ es continua para cada x, entonces F es continua.

(b) Supongamos que existen $\frac{\partial f}{\partial t}$ y una función $g \in L^1(\mu)$ tal que $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq g(x)$ para todo $x \in X, t \in [a,b]$. Probar que entonces F es diferenciable y $F'(x) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) d\mu(x)$.

13. (Ej 28 pág 60 Folland) Calcular

(a) $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 (1+nx^2)(1+x^2)^{-n} dx$.

(b) $\lim_{n \to \infty} \int_a^\infty n(1+n^2x^2)^{-1} dx$. (La respuesta depende de que a sea positivo, negativo o cero)

14. (Ej 29 pág 60 Folland) Probar que $\lim_{n \to \infty} \int_a^\infty x^n e^{-x} dx = n!$ diferenciando la ecuación $\int_a^\infty e^{-tx} dx = \frac{1}{t}$.