Funciones Reales I. 2016. Práctico nro 3
Funciones medibles

1. Ej. 1 pág. 48 del libro de Folland
2. Sea f una función real definida sobre el espacio medible $(X, \mathcal{A})$
   (a) Para que f sea medible es necesario y suficiente que todos los conjuntos del tipo $\{f(x)>a\}$, $a \in \mathbb{Q}$ sean medibles.
   (b) Si f es medible entonces los conjuntos $\{f(x) = a\}$, $\{a \leq f(x)<b\}$; $\{a < f(x)\leq b\}$; $\{a \leq f(x)\leq b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ son todos medibles.
3. Sean f y g funciones en condiciones de ser compuestas, si g es continua y f medible, probar que $g \circ f$ es medible.
4. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones medibles, entonces $\left\{x : \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}\right\}$ es medible.
5. Sean f, g funciones medibles sobre el espacio medible $(X, \mathcal{A})$. Probar que $f + g$; $f.g$; $\lambda.f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ y f/g donde g no se anule, son funciones medibles.
6. Ej. 5 pág. 48 del libro de Folland
7. Sea f una función real definida sobre un espacio medible. ¿Es cierto que f es medible sí y sólo si $|f|$ es medible?
8. Sea f una función real no acotada definida sobre un espacio medible, probar que no puede ser límite uniforme de funciones simples.
9. ¿ Es medible Borel la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log|x|$, si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$?
10. Si f es una función derivable sobre un intervalo I de la recta, su derivada f' es medible Borel.
11. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Demostrar que es medible el conjunto de puntos donde f no es continua.
12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monótona, probar que el conjunto de puntos de discontinuidad de f es numerable. (Sug. analiza primero el resultado para intervalos).
13. Ej. 9 pág. 48 del libro de Folland
14. Ej. 10 pág. 49 del libro de Folland