Funciones Reales I. 2016. Práctico nro. 2
Medida exterior.

1. En cada uno de los apartados siguientes se consideran un conjunto X y una aplicación μ^* definida en $\boldsymbol{P}(X)$. Indicar, en cada caso si μ^* es una medida exterior.

   (a) X es un conjunto arbitrario, y p un elemento fijo de X. Para cada subconjunto A de X se define $\mu^*(A) = 1$ si $p \in A$, y $\mu^*(A) = 0$ si $p \notin A$.

   (b) X es un conjunto arbitrario, y se define $\mu^*(A) = 1$ para cada subconjunto A de X.

   (c) X es un conjunto de 100 objetos dispuestos en un cuadro de 10 filas y 10 columnas. Para cada $A \subset X$, $\mu^*(A)$ es el número de columnas en las que hay algún elemento de A.

   (d) X es el conjunto de los números naturales. Para cada $A \subset X$ se define

$$\mu^*(A) = \limsup \left\{ \frac{1}{k} card\left(A \cap \{1, 2, ..., k\}\right) \right\}$$

2. Sea X un conjunto, $\{\mu_k^*\}_k$ una sucesión de medidas exteriores definidas sobre $\boldsymbol{P}(X)$, y $\{\alpha_k\}_k$ una sucesión de números reales positivos. Demostrar que también es una medida exterior la función μ^* definida mediante

$$\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k^*(A)$$

3. Determinar los conjuntos X para los que, definiendo $\rho(\varnothing) = 0$ y $\rho(A) = 1$ si $A \neq \varnothing$, $A \subset X$, ρ es una medida exterior, y aquellos para los cuales ρ es una medida.

4. Ej 17 pág. 32 del libro de Folland

5. Ej 18 pág. 32 del libro de Folland

6. Ej 20 pág. 32 del libro de Folland

7. Sean μ^* una medida exterior sobre X, $E \in \mathcal{A}$ con $\mathcal{A}$ la σ-álgebra del teorema de Caratheodory, $E \neq \varnothing$ y μ_E^* la restricción de μ^* a los subconjuntos de E. Demostrar que μ_E^* es una medida exterior sobre E y que la σ-álgebra del teorema de Caratheodory de μ_E^* es $\mathcal{A} \cap \boldsymbol{P}(E)$.

8. Se define una función μ^* sobre los subconjuntos de la recta real de la siguiente forma:

   (a) $\mu^*(A) = 0$ si A es numerable

   (b) $\mu^*(A) = 1$ si A es no numerable y existe un intervalo I acotado tal que $A \setminus I$ es numerable

   (c) $\mu^*(A) = \infty$ en otro caso.

Probar que μ^* es una medida exterior. ¿Cuál es la σ-álgebra asociada a μ^* por el proceso de Caratheodory?

9. Sean X un conjunto y μ_e una medida exterior en X. Sea μ la medida asociada a μ_e según el proceso de Caratheodory. Para cada $A \subset X$ se define

$$\mu^*(A) = \inf\{\mu(E) : A \subset E, E \text{ medible}\}$$

¿Son iguales μ_e y μ^*?

10. Ej 23 pág. 32 del libro de Folland

11. Ej 24 pág. 33 del libro de Folland