Funciones Reales I. Práctica nro. 1. Cursada 2016.
$\sigma-$Álgebras y medidas

1. a) Sea X un conjunto de 3 elementos dar ejemplos de álgebras de subconjuntos de X.

   b) Sea X un conjunto de 4 elementos dar ejemplos de álgebras de subconjuntos de X.

2. Probar que toda σ-álgebra es álgebra y clase monótona a la vez.

3. Sea Y un subconjunto no vacío de X y $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de X, ¿será $\{A \cap Y : A \in \mathcal{F}\}$ una σ-álgebra sobre Y?

4. Sean $f : X \to Y$, $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Y. ¿Será $f^{-1}(\mathcal{F}) = \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}\}$ una σ-álgebra sobre X?.

5. Sobre $X = [0, 1)$ los conjuntos que son uniones finitas de intervalos del tipo $[a, b)$, incluyendo $\varnothing$, constituyen un álgebra que no es una σ-álgebra.

6. ¿Coincide con la σ-álgebra de Borel $B(\mathbb{R})$ la generada por la clase de intervalos abiertos (o cerrados) de extremos racionales?

7. Sobre $\mathbb{R}$ se considera la σ-álgebra $B(\mathbb{R})$ de Borel, la generada por los compactos de $\mathbb{R}$ y la generada por los conjuntos del tipo $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq a\}$ con $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua. ¿Son la misma σ-álgebra?

8. Sea $D \subset \mathcal{P}(X), (X \neq \varnothing)$ con las siguientes propiedades:

   (a) $X \in D$

   (b) $A \diagdown B \in D$, si $A, B \in D$

   (c) $\biguplus_{k=1}^{\infty} A_k \in D$ si $A_k \in D, \forall k = 1, 2, 3, ...$($\biguplus$ es unión creciente)

   Demostrar que D es σ-álgebra si y sólos si $A \cap B \in D$, para todo $A, B \in D$.

9. Ej 2. página 24 (Folland)

10. Ej 3. página 24 (Folland)

11. Ej 4. página 24 (Folland)

12. Ej 5. página 24 (Folland)

13. Sea X un conjunto infinito. Sobre $\mathcal{P}(X)$ definimos $\mu(E) = 0$ si E es finito y $\mu(E) = \infty$ si E no es finito. ¿Es μ una medida sobre X?.

14. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ tal que:

    (a) $\mu(A) < \infty$ para algún $A \in \mathcal{A}$

    (b) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B); A, B \in \mathcal{A}, A \cap B = \varnothing$

    (c) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ si $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Probar que μ es una medida.

15. Si X es un conjunto infinito no numerable, consideremos $\mathcal{F}$ la familia de los subconjuntos $A \subset X$ tales que A ó $X \diagdown A$ es finito o numerable y μ la función de conjunto definida por $\mu(A) = 0$ si A es finito o numerable y $\mu(A) = \infty$ en cualquier otro caso. Probar que $(X, \mathcal{F}, \mu)$ es un espacio de medida.
16. Ej 6. página 27 (Folland)
17. Ej 7. página 27 (Folland)
18. Ej 8. página 27 (Folland)
19. Ej 9. página 27 (Folland)
20. Ej 10. página 27 (Folland)
21. Ej 11. página 27 (Folland)
22. Ej 12. página 27 (Folland)
23. Ej 13. página 27 (Folland)
24. Ej 14. página 27 (Folland)
25. Ej 15. página 27 (Folland)